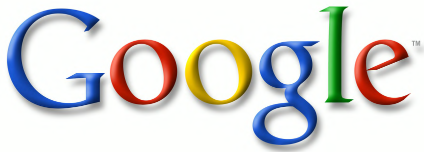
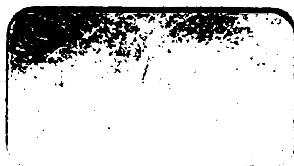

Google



INVERSIONEN

BEI

PERMUTATIONEN MIT WIEDERHOLUNG

DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

GROSSHERZOGLICH HESSISCHEN LUDWIGS-UNIVERSITÄT ZU GIESSEN

VORGELEGT VON

OTTO KÄMMER

[illegible]

[illegible]

[illegible]



INVERSIONEN

BEI

PERMUTATIONEN MIT WIEDERHOLUNG

DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

GROSSHERZOGLICH HESSISCHEN LUDWIGS-UNIVERSITÄT ZU GIESSEN

VORGELEGT VON

OTTO KAMMER

LEHRAMTSASSESSOR

GIESSEN 1905

VON MÜNCHOW'SCHE HOF- UND UNIVERSITÄTS-DRUCKEREI (O. KINDT)

Genehmigt durch das Prüfungskollegium
31. 5. 1905.
Referent: Dr. Netto.

Einleitung.

Ist die Reihenfolge der gegebenen Elemente einer Komplexion durch gesetzmässige Anordnung genau bestimmt, so bildet jedes seiner Ordnung nach spätere Element mit jedem unmittelbar, oder durch andere Elemente getrennt, folgenden früheren Element eine Inversion. Nimmt man die Elemente aus der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, ..., a, so findet man in einer Komplexion so viele Inversionen, als in ihr grössere vor kleineren Zahlen stehen; z. B. besitzt die Komplexion 352641 die 9 Inversionen 31, 51, 21, 61, 41, 32, 52, 54, 64. Bei der natürlichen Ordnung der Elemente ergibt sich die Minimalzahl der Inversionen einer Komplexion, nämlich 0, bei der umgekehrten Ordnung die Maximalzahl von Inversionen $\binom{a}{2}$.*)

Bezeichnet man mit P(a) die Anzahl aller Permutationen aus den a von einander verschiedenen Elementen 1, 2, 3, ... a, mit $P_g(a)$ die Zahl derjenigen unter ihnen, welche eine gerade Anzahl von Inversionen besitzen, und entsprechend mit $P_u(a)$ die Anzahl der Permutationen von P(a) mit ungerader Inversionszahl, so ist

$$P_g(a) = P_u(a) = \frac{1}{2} \cdot P(a). \text{**)}$$

Die Permutationen des Systems P(a) erhält man aus denen des vorhergehenden Systems P(a – 1), indem man das neue Element a der Reihe nach an das Ende, vor das letzte Element, vor das vorletzte Element usw., schliesslich an den Anfang einer jeden Permutation des Systems P(a – 1) setzt. Das neue Element a kann also in jeder Permutation des früheren Systems an a verschiedene Stellen treten, sodass dadurch a·P(a – 1) neue Permutationen entstehen, d. h.:

$$P(a) = a \cdot P(a-1) = a \cdot (a-1)! = a!$$

Tritt das neue und zugleich höchste Element a an das Ende der gegebenen Permutationen P(a – 1), so ändert sich dabei nichts an der Anzahl der Inversionen der früheren Permutationen, d. h. die Inversionszahl jeder so gebildeten neuen Permutation ist gleich derjenigen der entsprechenden alten Permutation. Tritt aber a vor das letzte und damit vor ein niedrigeres Element, so erhalten wir in jeder neuen Permutation eine Inversion mehr als in den entsprechenden Permutationen von P(a – 1). Kommt a vor die beiden letzten Elemente in jeder alten Permutation zu stehen, so ergibt sich in jeder der so entstandenen (a – 1)! neuen Permutationen eine Vermehrung der Inversionszahl um je 2 Inversionen usw. Endlich liefert das neue Element a am Anfang jeder alten Permutation eine Vermehrung der früheren Inversionszahlen um je a – 1, weil es dann vor a – 1 niedrigeren Elementen steht.

Für die Summe aller in den Permutationen des Systems P(a) überhaupt vorkommenden Inversionen I(a) ergibt sich daher die Beziehung

$$I(a) = a \cdot I(a-1) + \binom{a}{2} \cdot P(a-1).$$

---

*) Vgl. Netto: Kombinatorik, Kap. 4.

**) Netto: l. c. § 56.

Bei wiederholter Anwendung dieser Rekursionsformel findet man, da $J(1) = 0$ ist,

$$I(a) = \frac{1}{2}\binom{a}{2} a!\,^{*})$$

Bedeutet $I_g(a)$ die Summe aller Inversionen, die in den Permutationen $P_g(a)$ mit gerader Inversionszahl vorkommen, und $I_u(a)$ die Anzahl aller Inversionen der $P_u(a)$, so lässt sich mit Hilfe des obigen Bildungsgesetzes leicht die Beziehung ableiten

$$I_g(a) = I_u(a) = \frac{1}{2} I(a) \text{ für } a > 3.$$

Für die drei ersten Systeme P(1), P(2), P(3) ergeben sich die Werte

$$I_u^g(1) = {0 \atop 0} \qquad I_u^g(2) = {0 \atop 1} \qquad I_u^g(3) = {4 \atop 5},$$

wobei überall der obere Wert für I_g, der untere für I_u zu lesen ist.

Im folgenden soll nun der Fall untersucht werden, dass unter den gegebenen Elementen auch gleiche Elemente einer oder mehrerer Arten vorhanden sind. Kommen unter den gegebenen z Elementen k gleiche der ersten Art, l gleiche der zweiten, m gleiche der dritten Art, ... endlich t gleiche Elemente a vor, wobei $z = k + l + m + \ldots + t$ und die Anzahl der von einander verschiedenen Elemente gleich a ist, so bezeichnen wir die Gesamtzahl aller aus diesen z Elementen gebildeten Permutationen mit Wiederholung mit $P(1^k, 2^l, 3^m, \ldots a^t)$, die Zahl der in diesem System enthaltenen Permutationen mit gerader Inversionszahl mit $P_g(1^k, 2^l, 3^m, \ldots a^t)$, diejenige der ungeraden Permutationen mit $P_u(1^k, 2^l, 3^m, \ldots a^t)$. Entsprechend nennen wir die Summe aller Inversionen dieses Systems $I(1^k, 2^l, 3^m, \ldots a^t)$, die Inversionssumme der geraden Permutationen P_g ist $I_g(1^k, 2^l, 3^m, \ldots a^t)$, die der ungeraden Permutationen P_u heisst $I_u(1^k, 2^l, 3^m, \ldots a^t)$.

Abschnitt I.

Systeme $(1^k, 2^l)$.

Wir gehen aus von der einzigen Permutation des Systems $P(1^k)$, nämlich $1 1 1 \ldots \overset{(k)}{1}$ mit 0 Inversionen. Ein dazukommendes neues Element 2 kann auf $k + 1$ verschiedene Arten in diese Permutation eintreten, wodurch wir alle $k + 1$ Permutationen des neuen Systems $P(1^k, 2^1)$ erhalten. Dabei ergeben sich folgende Inversionszahlen:

1.	Steht 2 am Ende, so tritt keine Änderung ein,	d. h.: $+0$ Inversionen
2.	Tritt 2 vor das letzte Element, also vor ein niedrigeres	$+1$ „
3.	„ 2 „ die beiden letzten El., „ „ 2. niedrigere	$+2$ „
3.	„ 2 „ „ 3 „ „ „ „ 3 „	$+3$ „
. . .	. . . .	. . .
$(k+1)$.	„ 2 an den Anfang der Perm., also vor k niedrigere	$+k$ „

Mit Hilfe dieser Bildungsweise lässt sich für $l = 1$ die Zahl der geraden Permutationen und der in ihnen enthaltenen Inversionen leicht bestimmen.

---

*) Vgl. Netto: l. c. p. 94.

Fügen wir in derselben Weise in den sämtlichen $P(1^k, 2^l)$ noch ein zweites Element 2 hinzu, so liefern wiederum nur die $k+1$ ersten Stellungen Beiträge zum System $P(1^k, 2^2)$, und zwar erhalten wir in der

1. Stellung	2. Stellung	3. Stellung	...	$(k+1)$. Stellung	
$k+1$	k	$k-1$	...	1	Permutationen

mit einer Vermehrung der Inversionszahl um je

0	1	2	...	k	Inversionen

gegenüber den entsprechenden Permutationen $P(1^k, 2^1)$.

Nach demselben Verfahren ergeben sich durch Zufügen eines dritten Elements 2 für $l=3$ in der

1. Stellung	2. Stellung	3. Stellung	...	$(k+1)$. Stellung	
$\binom{k+2}{2}$	$\binom{k+1}{2}$	$\binom{k}{2}$	...	1	Permutationen

mit einem Inversionszuwachs von je

0	1	2	...	k	Inversionen

gegenüber den entsprechenden Permutationen $P(1^k, 2^2)$.

Ähnliches erhält man ebenso für $l = 4, 5, \ldots$

Diese Art der Aufstellung der $P(1^k, 2^l)$ erleichtert uns das Auszählen der $P_g(1^k, 2^l)$ und $I_g(1^k, 2^l)$ ausserordentlich. Dabei müssen wir zwischen geradem und ungeradem k unterscheiden. Auf diese Weise finden wir induktiv folgende Resultate für $l = 1, 2, 3, 4, 5$:

I. k gerade.

	$P_g(1^k, 2^l)$	$I_g(1^k, 2^l)$
$l=1$	$\frac{1}{2}(k+1)+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\binom{k+1}{2}+\frac{\varkappa}{2}$
$l=2$	$\frac{1}{2}\binom{k+2}{2}+\frac{1}{2}(\varkappa+1)$	$\frac{3}{2}\binom{k+2}{3}+2\binom{\varkappa+1}{2}$
$l=3$	$\frac{1}{2}\binom{k+3}{3}+\frac{1}{2}(\varkappa+1)$	$3\binom{k+3}{4}+3\binom{\varkappa+1}{2}$
$l=4$	$\frac{1}{2}\binom{k+4}{4}+\frac{1}{2}\binom{\varkappa+2}{2}$	$5\binom{k+4}{5}+6\binom{\varkappa+2}{3}$
$l=5$	$\frac{1}{2}\binom{k+5}{5}+\frac{1}{2}\binom{\varkappa+2}{2}$	$\frac{15}{2}\binom{k+5}{6}+\frac{15}{2}\binom{\varkappa+2}{3}$

II. k ungerade.

	$P_g(1^k, 2^l)$	$I_g(1^k, 2^l)$
$l=1$	$\frac{1}{2}(k+1)$	$\frac{1}{2}\binom{k+1}{2}-\frac{1}{2}(\varkappa+1)$
$l=2$	$\frac{1}{2}\binom{k+2}{2}+\frac{1}{2}(\varkappa+1)$	$\frac{3}{2}\binom{k+2}{3}+2\binom{\varkappa+1}{2}+\frac{1}{2}(\varkappa+1)$
$l=3$	$\frac{1}{2}\binom{k+3}{3}$	$3\binom{k+3}{4}-\binom{\varkappa+2}{2}$
$l=4$	$\frac{1}{2}\binom{k+4}{4}+\frac{1}{2}\binom{\varkappa+2}{2}$	$5\binom{k+4}{5}+6\binom{\varkappa+2}{3}+\binom{\varkappa+2}{2}$
$l=5$	$\frac{1}{2}\binom{k+5}{5}$	$\frac{15}{2}\binom{k+5}{6}-\frac{3}{2}\binom{\varkappa+3}{3}$,

wenn $\varkappa$ das grösste in $\frac{k}{2}$ enthaltene Ganze bedeutet. Analog bezeichnen wir mit λ, μ, ν, ... und ζ die grössten Ganzen von $\frac{l}{2}, \frac{m}{2}, \frac{n}{2}, \ldots$ und $\frac{z}{2}$. Die grösstmögliche Inversionszahl, die in einer der Permutationen überhaupt vorkommen kann, nennen wir i_M, die durchschnittliche, mittlere Inversionszahl sei $i_m = \frac{I}{P}$.

Für die Anzahl der Permutationen $P(1^k, 2^l)$ folgt sofort aus der Formel $\frac{(k+l)!}{k!\,l!}$ $P(1^k, 2^l) = \binom{z}{k}$, wenn $z = k + l$.

Da im extremen Falle die sämtlichen k Elemente 1 hinter den l Elementen 2 stehen können, so sind in einer der $P(1^k, 2^l)$ höchstens $k \cdot l$ Inversionen möglich, d. h.

$$i_M(1^k, 2^l) = k \cdot l.$$

In jeder der $P(1^k, 2^l)$ kann man die k Elemente 1 auf $k \cdot l$ verschiedene Arten den l Elementen 2 zuordnen. Liefert in einer Komplexion das α. Element 1 mit dem β. Element 2 eine Inversion, so liefert $(\alpha\beta)$ keine Inversion in der umgekehrten, von rechts nach links gelesenen, inversen Permutation und umgekehrt. Jede der $k \cdot l$ Möglichkeiten veranlasst also in einer der beiden Komplexionen eine Inversion; d. h. die Inversionszahlen zweier inversen Permutationen ergänzen sich zu $i_M(1^k, 2^l) = k \cdot l$. Hierbei kann im Gegensatz zu den Permutationen ohne Wiederholung der Fall eintreten, dass eine Komplexion sich selbst invers ist, sodass ihre Inversionszahl $= \frac{1}{2} \cdot i_M$. Das System $P(1^k, 2^l)$ setzt sich demnach aus lauter paarweise oder sich selbst inversen Komplexionen zusammen, folglich ist

$$i_m(1^k, 2^l) = \frac{1}{2} i_M(1^k, 2^l).$$

Daher findet man für die Summe aller in den $P(1^k, 2^l)$ enthaltenen Inversionen

$$I(1^k, 2^l) = i_m(1^k, 2^l) \cdot P(1^k, 2^l) = \frac{1}{2} i_M(1^k, 2^l) \cdot P(1^k, 2^l) = \frac{k \cdot l}{2}\binom{z}{k} = \binom{k+1}{2}\binom{z}{k+1}.$$

Unter Benutzung dieser Werte lassen sich die für $l = 1, 2, 3, 4, 5$ gefundenen Ausdrücke leicht verallgemeinern und folgendermassen gruppieren:

A. $P^g_u(1^k, 2^l)$: I. k und l beide ungerade.

$$P^g_u = \frac{1}{2}\binom{z}{k} = \frac{1}{2} P.$$

II. k und l nicht gleichzeitig ungerade.

$$P^g_u = \frac{1}{2}\binom{z}{k} \pm \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa} = \frac{1}{2} P \pm \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}.$$

B. $I^g_u(1^k, 2^l)$: I. k und l beide ungerade, sodass $\zeta = \varkappa + \lambda + 1$.

$$I^g_u = \frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{z}{k+1} \mp \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda} = \frac{1}{2} I \mp \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda}.$$

II. k und l **nicht** zugleich ungerade, also $\zeta = \varkappa + \lambda$.

$$I_u^g = \frac{k \cdot l}{4} \left[\binom{z}{k} \pm \binom{\zeta}{\varkappa} \right] = \frac{1}{2}\, i_M(1^k, 2^l) \cdot P_u^g(1^k, 2^l).$$

Dabei gehört stets das obere Vorzeichen zum oberen Index g, das untere Zeichen zum unteren Index u. Wenn das zweite Glied in den Formeln für P_g und I_g fehlt, so stimmen die Werte für gerade und ungerade Permutationen überein.

An diesen Formeln ändert sich nichts, wenn man k und l miteinander vertauscht; dies entspricht der Tatsache, dass hinsichtlich der Inversionen zwischen den Systemen $P(1^k, 2^l)$ und $P(1^l, 2^k)$ kein Unterschied besteht. Das zeigen auch die folgenden Tabellen zum System $P(1^k, 2^l)$, die man mit Hilfe der gefundenen Werte leicht zusammenstellen kann.

A. a) $P_g(1^k, 2^l)$:

k =	1	2	3	4	5
l = 1	1	2	2	3	3
2	2	4	6	9	12
3	2	6	10	19	28
4	3	9	19	38	66
5	3	12	28	66	126

A. b) $P_u(1^k, 2^l)$:

k =	1	2	3	4	5
l = 1	1	1	2	2	3
2	1	2	4	6	9
3	2	4	10	16	28
4	2	6	16	32	60
5	3	9	28	60	126

A. c) $P(1^k, 2^l) = P_g(1^k, 2^l) + P_u(1^k, 2^l)$:

k =	1	2	3	4	5
l = 1	2	3	4	5	6
2	3	6	10	15	21
3	4	10	20	35	56
4	5	15	35	70	126
5	6	21	56	126	252

B. a) $I_g(1^k, 2^l)$:

k =	1	2	3	4	5
l = 1	0	2	2	6	6
2	2	8	18	36	60
3	2	18	42	114	204
4	6	36	114	304	660
5	6	60	204	660	1560

B. b) $I_u(1^k, 2^l)$:

k =	1	2	3	4	5
l = 1	1	1	4	4	9
2	1	4	12	24	45
3	4	12	48	96	216
4	4	24	96	256	600
5	9	45	216	600	1590

B. c) $I(1^k, 2^l) = I_g(1^k, 2^l) + I_u(1^k, 2^l)$:

k =	1	2	3	4	5
l = 1	1	3	6	10	15
2	3	12	30	60	105
3	6	30	90	210	420
4	10	60	210	560	1260
5	15	105	420	1260	3150

Rekursionsformeln für $P_g(1^k, 2^l)$ und $I_g(1^k, 2^l)$.

Von den Permutationen $P(1^k, 2^l)$ liefern diejenigen, welche mit dem Element 1 anfangen, dieselben Inversionszahlen wie die $P(1^{k-1}, 2^l)$ und diejenigen, welche mit 2 beginnen, gegenüber den $P(1^k, 2^{l-1})$ eine Vermehrung der Inversionszahl einer jeden Permutation um je k Inversionen, weil das höhere Element 2 überall vor k niedrigeren Elementen 1 steht. Dabei ändert sich die Klasse der Komplexionen nicht, wenn k gerade ist, während bei ungeradem k aus den geraden Permutationen ungerade entstehen und umgekehrt. Wir erhalten daher für $P_g(1^k, 2^l)$ und $I_g(1^k, 2^l)$ Reduktionsformeln, durch die wir diese Grössen bei Permutationen mit z Elementen zurückführen auf die Werte von Systemen mit nur $z-1$ Elementen.

I. k gerade:
$$P_g(1^k, 2^l) = P_g(1^{k-1}, 2^l) + P_g(1^k, 2^{l-1}),$$
$$I_g(1^k, 2^l) = I_g(1^{k-1}, 2^l) + I_g(1^k, 2^{l-1}) + k \cdot P_g(1^k, 2^{l-1}).$$

II. k ungerade:
$$P_g(1^k, 2^l) = P_g(1^{k-1}, 2^l) + P_u(1^k, 2^{l-1}),$$
$$I_g(1^k, 2^l) = I_g(1^{k-1}, 2^l) + I_u(1^k, 2^{l-1}) + k \cdot P_u(1^k, 2^{l-1}).$$

Beweis für die Richtigkeit der allgemeinen Formeln (durch strenge Induktion).

Wir nehmen an, dass die auf S. 6 zusammengestellten Formeln für beliebige k und $1, 2, 3, \ldots l$ richtig sind, und zeigen mit Hilfe der obigen Rekursionsformeln, dass sie auch für $l' = l + 1$ gelten. Dies ist der Fall, wenn die aus den allgemeinen Formeln für $l' = l + 1$ sich ergebenden Werte identisch gleich sind den aus den Reduktionsformeln folgenden Resultaten.

Wir setzen im folgenden $z = k + l$, $z' = k + l + 1 = k + l'$, und entsprechend sind ζ und ζ' die grössten Ganzen von $\frac{z}{2}$ und $\frac{z'}{2}$.

I. k gerade.

$$P_g(1^k, 2^{l+1}) = P_g(1^{k-1}, 2^{l+1}) + P_g(1^k, 2^l)$$
$$I_g(1^k, 2^{l+1}) = I_g(1^{k-1}, 2^{l+1}) + I_g(1^k, 2^l) + k \cdot P_g(1^k, 2^l)$$

1. l gerade, dann müssen die Identitäten bestehen:

$$P_g(1^k, 2^{l+1}) \equiv \frac{1}{2}\binom{z}{k-1} + \frac{1}{2}\binom{z}{k} + \frac{1}{2}\binom{\zeta}{x} \equiv \frac{1}{2}\binom{z'}{k} + \frac{1}{2}\binom{\zeta'}{x}, \text{ da } \zeta = \zeta' = x + \lambda.$$

$$I_g(1^k, 2^{l+1}) \equiv \frac{1}{2}\binom{k}{2}\binom{z}{k} - \frac{1}{2}\binom{\zeta}{x-1}\binom{\zeta - x + 1}{\lambda} + \frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{z}{k+1} + \frac{k \cdot l}{4}\binom{\zeta}{x} + \frac{k}{2}\binom{z}{k} + \frac{k}{2}\binom{\zeta}{x}$$

$$\equiv \frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\left(\binom{z}{k+1} + \binom{z}{k}\right) + \frac{k(l+1)}{4}\binom{\zeta}{x}$$

$$\equiv \frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{z'}{k+1} + \frac{k \cdot l'}{4} \cdot \binom{\zeta'}{x}, \quad \text{weil } l' = l + 1 \text{ und } \zeta' = \zeta.$$

2. l ungerade, sodass $\zeta' = \zeta + 1$.

$$P_g(1^k, 2^{l+1}) \equiv \frac{1}{2}\binom{z}{k-1} + \frac{1}{2}\binom{\zeta}{x-1} + \frac{1}{2}\binom{z}{k} + \frac{1}{2}\binom{\zeta}{x}$$
$$\equiv \frac{1}{2}\binom{z'}{k} + \frac{1}{2}\binom{\zeta'}{x},$$

$$I_g(1^k, 2^{l+1}) \equiv \frac{(k-1)(l+1)}{4}\left[\binom{z}{k-1} + \binom{\zeta}{x-1}\right] + \frac{k \cdot l}{4}\left[\binom{z}{k} + \binom{\zeta}{x}\right] + \frac{k}{2}\binom{z}{k} + \frac{k}{2}\binom{\zeta}{x}$$
$$\equiv \frac{k}{4}\binom{z}{k}(k + l + 1) + \frac{x}{2}\binom{\zeta}{x}(k + l + 1)$$
$$\equiv \frac{k \cdot l'}{4}\left[\binom{z'}{k} + \binom{\zeta'}{x}\right].$$

II. k ungerade.

$$P_g(1^k, 2^{l+1}) = P_g(1^{k-1}, 2^{l+1}) + P_u(1^k, 2^l)$$
$$I_g(1^k, 2^{l+1}) = I_g(1^{k-1}, 2^{l+1}) + I_u(1^k, 2^l) + k \cdot P_u(1^k, 2^l).$$

1. l gerade, folglich $\zeta' = \zeta + 1$.

$$P_g(1^k, 2^{l+1}) \equiv \frac{1}{2}\binom{z}{k-1} + \frac{1}{2}\binom{\zeta}{x} + \frac{1}{2}\binom{z}{k} - \frac{1}{2}\binom{\zeta}{x} \equiv \frac{1}{2}\binom{z'}{k},$$

$$I_g(1^k, 2^{l+1}) \equiv \frac{(k-1)(l+1)}{4}\left[\binom{z}{k-1} + \binom{\zeta}{x}\right] + \frac{k \cdot l}{4}\left[\binom{z}{k} - \binom{\zeta}{x}\right] + \frac{k}{2} \cdot \left[\binom{z}{k} - \binom{\zeta}{x}\right]$$
$$\equiv \frac{k}{4}\binom{z}{k}(k + l + 1) - \frac{1}{4}\binom{\zeta}{x}(k + l + 1)$$
$$\equiv \frac{k \cdot l'}{4}\binom{z'}{k} - \frac{1}{2}\binom{\zeta'}{x}\binom{\zeta' - x}{\lambda}.$$

2. l ungerade, sodass $\zeta' = \zeta = \varkappa + \lambda + 1$.

$$P_g(1^k, 2^{l+1}) \equiv \frac{1}{2}\binom{z}{k-1} + \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa} + \frac{1}{2}\binom{z}{k} \equiv \frac{1}{2}\binom{z'}{k} + \frac{1}{2}\binom{\zeta'}{\varkappa},$$

$$I_g(1^k, 2^{l+1}) \equiv \frac{(k-1)(l+1)}{4}\left[\binom{z}{k-1} + \binom{\zeta}{\varkappa}\right] + \frac{k \cdot l}{4}\binom{z}{k} + \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda} + \frac{k}{2}\binom{z}{k}$$

$$\equiv \frac{k}{4}\binom{z}{k}(k+l+1) + \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\frac{k(l+1)}{2} - \frac{k \cdot l'}{4}\left[\binom{z'}{k} + \binom{\zeta'}{\varkappa}\right].$$

Die verlangten Identitäten bestehen hiernach in allen Fällen, d. h. die Formeln für $P_g(1^k, 2^l)$ und $I_g(1^k, 2^l)$ sind auch richtig für $l' = l + 1$, wenn man sie als gültig annimmt für $1, 2, 3, \ldots l$. Nun haben wir aber oben gesehen, dass sie für $l = 1, 2, 3, 4, 5$ richtig sind, folglich gelten sie auch ganz allgemein für beliebige l.

Abschnitt II.

Systeme $P(1^k, 2^l, 3^m)$.

Zur Aufstellung der Permutationen der neuen Systeme für $m = 1, 2, 3, \ldots$ wenden wir das frühere Verfahren an, indem wir jetzt das System $P(1^k, 2^l)$ mit $k + l$ Elementen als Ausgangssystem annehmen und der Reihe nach ein, zwei, drei, ... Elemente 3 zufügen. Auf diese Weise lassen sich die Inversionen bei jedem neuen System leicht auszählen, und man erhält so induktiv für $m = 1, 2, 3, 4, 5$ die folgenden Resultate.

1. $m = 1$.

Für k und l nicht beide zugleich gerade ergibt sich

$$P_g(1^k, 2^l, 3^1) = \frac{1}{2}\binom{k+l+1}{k}\binom{l+1}{l},$$

$$I_g(1^k, 2^l, 3^1) = \frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{k+l+1}{k+1}\binom{l+1}{l} + \frac{1}{2}\binom{l+1}{2}\binom{k+l+1}{k} - \frac{1}{2}\binom{\varkappa+\lambda+1}{\varkappa}\binom{\lambda+1}{\lambda}.$$

Sind k und l beide gerade, so ist

$$P_g(1^k, 2^l, 3^1) = \frac{1}{2}\binom{k+l+1}{k}\binom{l+1}{l} + \frac{1}{2}\binom{\varkappa+\lambda}{\lambda},$$

$$I_g(1^k, 2^l, 3^1) = \frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{k+l+1}{k+1}\binom{l+1}{l} + \frac{1}{2}\binom{l+1}{2}\binom{k+l+1}{k} + \frac{k(l+1)+l}{4}\binom{\varkappa+\lambda}{\lambda}.$$

2. $m = 2$.

k und l sind beide ungerade:

$$P_g(1^k, 2^l, 3^2) = \frac{1}{2}\binom{k+l+2}{k}\binom{l+2}{l},$$

$$I_g(1^k, 2^l, 3^2) = \frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{k+l+2}{k+1}\binom{l+2}{l} + \frac{1}{2}\binom{l+1}{2}\binom{k+l+2}{k}\binom{l+2}{l+1} - \frac{2}{2}\binom{\varkappa+\lambda+2}{\varkappa}\binom{\lambda+2}{\lambda}.$$

k und l sind **n i c h t** gleichzeitig ungerade:

$$P_g(1^k, 2^l, 3^2) = \frac{1}{2}\binom{k+l+2}{k}\binom{l+2}{l} + \frac{1}{2}\binom{\varkappa+\lambda+1}{\varkappa}\binom{\lambda+1}{\lambda},$$

$$I_g(1^k, 2^l, 3^2) = \frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{k+l+2}{k+1}\binom{l+2}{l} + \frac{1}{2}\binom{l+1}{2}\binom{k+l+2}{k}\binom{l+2}{l+1} + \frac{k(l+2)+2l}{4}\binom{\varkappa+\lambda+1}{\varkappa}\binom{\lambda+1}{\lambda}.$$

3. m = 3.

k und l sind **n i c h t** zugleich gerade:

$$P_g(1^k, 2^l, 3^3) = \frac{1}{2}\binom{k+l+3}{k}\binom{l+3}{l},$$

$$I_g(1^k, 2^l, 3^3) = \frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{k+l+3}{k+1}\binom{l+3}{l} + \frac{1}{2}\binom{l+1}{2}\binom{k+l+3}{k}\binom{l+3}{l+1} - \frac{2}{2}\binom{\varkappa+\lambda+2}{\varkappa}\binom{\lambda+2}{\lambda}.$$

k und l beide gerade:

$$P_g(1^k, 2^l, 3^3) = \frac{1}{2}\binom{k+l+3}{k}\binom{l+3}{l} + \frac{1}{2}\binom{\varkappa+\lambda+1}{\varkappa}\binom{\lambda+1}{\lambda},$$

$$I_g(1^k, 2^l, 3^3) = \frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{k+l+3}{k+1}\binom{l+3}{l} + \frac{1}{2}\binom{l+1}{2}\binom{k+l+3}{k}\binom{l+3}{l+1} + \frac{k(l+3)+3l}{4}\binom{\varkappa+\lambda+1}{\varkappa}\binom{\lambda+1}{\lambda}.$$

4. m = 4.

k und l beide ungerade:

$$P_g(1^k, 2^l, 3^4) = \frac{1}{2}\binom{k+l+4}{k}\binom{l+4}{l},$$

$$I_g(1^k, 2^l, 3^4) = \frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{k+l+4}{k+1}\binom{l+4}{l} + \frac{1}{2}\binom{l+1}{2}\binom{k+l+4}{k}\binom{l+4}{l+1} - \frac{3}{2}\binom{\varkappa+\lambda+3}{\varkappa}\binom{\lambda+3}{\lambda}.$$

k und l **n i c h t** beide ungerade:

$$P_g(1^k, 2^l, 3^4) = \frac{1}{2}\binom{k+l+4}{k}\binom{l+4}{l} + \frac{1}{2}\binom{\varkappa+\lambda+2}{\varkappa}\binom{\lambda+2}{\lambda},$$

$$I_g(1^k, 2^l, 3^4) = \frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{k+l+4}{k+1}\binom{l+4}{l} + \frac{1}{2}\binom{l+1}{2}\binom{k+l+4}{k}\binom{l+4}{l+1} + \frac{k(l+4)+4l}{4}\binom{\varkappa+\lambda+2}{\varkappa}\binom{\lambda+2}{\lambda}.$$

5. m = 5.

k und l **n i c h t** beide gerade:

$$P_g(1^k, 2^l, 3^5) = \frac{1}{2}\binom{k+l+5}{k}\binom{l+5}{l},$$

$$I_g(1^k, 2^l, 3^5) = \frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{k+l+5}{k+1}\binom{l+5}{l} + \binom{l+1}{2}\binom{k+l+5}{k}\binom{l+5}{l+1} - \frac{3}{2}\binom{\varkappa+\lambda+3}{3}\binom{\lambda+3}{\lambda}.$$

k und l beide gerade:

$$P_g(1^k, 2^l, 3^5) = \frac{1}{2}\binom{k+l+5}{k}\binom{l+5}{l} + \frac{1}{2}\binom{\varkappa+\lambda+2}{\varkappa}\binom{\lambda+2}{\lambda},$$

$$I_g(1^k, 2^l, 3^5) = \frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{k+l+5}{k+1}\binom{l+5}{l} + \frac{1}{2}\binom{l+1}{2}\binom{k+l+5}{k}\binom{l+5}{l+1} + \frac{k(l+5)+5l}{4}\binom{\varkappa+\lambda+2}{\varkappa}\binom{\lambda+2}{\lambda}.$$

Aus diesen Werten lassen sich analog leicht die allgemeinen Formeln für das System $P(1^k, 2^l, 3^m)$ bilden. Setzen wir nun $k+l+m = z$, so folgt sofort aus der Formel $\frac{(k+l+m)!}{k!\,l!\,m!}$

$$P(1^k, 2^l, 3^m) = \binom{z}{k}\binom{z-k}{l}.$$

Da die k gleichen Elemente 1 höchstens hinter l+m höhere, die l gleichen Elemente 2 höchstens hinter die m höheren Elemente 3 treten können, so ist

$$i_M(1^k, 2^l, 3^m) = k(l+m) + l\cdot m = k\cdot l + l\cdot m + m\cdot k.$$

Und weil auch das System $P(1^k, 2^l, 3^m)$ aus lauter paarweise oder sich selbst inversen Permutationen besteht, deren Inversionszahlen sich zu i_M ergänzen, bzw. gleich $\frac{1}{2}\cdot i_M$ sind, so muss

$$i_m(1^k, 2^l, 3^m) = \frac{1}{2}\cdot i_M(1^k, 2^l, 3^m) \text{ sein, folglich auch}$$

$$I(1^k, 2^l, 3^m) = i_m(1^k, 2^l, 3^m)\cdot P(1^k, 2^l, 3^m) = \frac{1}{2}\cdot i_M\cdot P = \binom{k+1}{2}\binom{z}{k+1}\binom{z-k}{l} + \binom{l+1}{2}\binom{z}{k}\binom{z-k}{l+1}.$$

Mit Hilfe dieser Werte lassen sich die aus der obigen Zusammenstellung sich ergebenden allgemeinen Formeln in die folgenden beiden Gruppen einordnen.

I. Mindestens zwei der drei Grössen k, l, m sind ungerade.

$$P_u^g(1^k, 2^l, 3^m) = \frac{1}{2}\binom{z}{k}\binom{z-k}{l} = \frac{1}{2}P(1^k, 2^l, 3^m),$$

$$I_u^g(1^k, 2^l, 3^m) = \frac{1}{2}I(1^k, 2^l, 3^m) \mp \frac{1}{2}\binom{\zeta}{x}\binom{\zeta-x}{\lambda}\binom{\zeta-x-\lambda}{\mu}.$$

II. Mindestens zwei von den drei Multiplizitäten k, l, m sind gerade.

$$P_u^g(1^k, 2^l, 3^m) = \frac{1}{2}P(1^k, 2^l. 3^m) \pm \frac{1}{2}\binom{\zeta}{x}\binom{\zeta-x}{\lambda},$$

$$I_u^g(1^k, 2^l, 3^m) = \frac{1}{2}I(1^k, 2^l, 3^m) \pm \frac{1}{4}\cdot i_M(1^k, 2^l, 3^m)\cdot\binom{\zeta}{x}\binom{\zeta-x}{\lambda} = \frac{1}{2}\cdot i_M(1^k, 2^l, 3^m)\cdot P_u^g(1^k, 2^l, 3^m).$$

Rekursionsformeln für $P_g(1^k, 2^l, 3^m)$ und $I_g(1^k, 2^l, 3^m)$.

1. Diejenigen der $P(1^k, 2^l, 3^m)$, welche mit dem Element 1 anfangen, liefern dieselben Inversionszahlen wie die $P(1^{k-1}, 2^l, 3^m)$.

2. Diejenigen unter ihnen, die mit 2 beginnen, ergeben dieselben Inversionen wie die $P(1^k, 2^{l-1}, 3^m)$, ausserdem in jeder Komplexion noch einen Zuwachs von je k Inversionen, weil das am Anfang stehende Element 2 überall vor k niedrigere Elemente 1 tritt. Ist k gerade, so ändert sich dadurch die Klasse der Permutationen nicht, bei ungeradem k werden die geraden Permutationen in ungerade verwandelt und umgekehrt.

3. Die mit 3 anfangenden Komplexionen von $P(1^k, 2^l, 3^m)$ liefern dieselben Inversionen wie die $P(1^k, 2^l, 3^{m-1})$ und stets noch in jeder Permutation eine Vermehrung der Inversionszahl um $k+l$ Inversionen, da das höchste Element 3 jedesmal vor $k+l$ niedrigeren Elementen 1 und 2 steht. Dabei bleibt die Klasse der Permutationen dieselbe, wenn $k+l$ gerade ist, wenn also $k \nmid l$ entweder beide gerade oder beide ungerade sind; dagegen ändert sich die Klasse der Permutationen, wenn $k+l$ ungerade ist, d. h. wenn k und l nicht gleichzeitig gerade oder ungerade sind.

Wir erhalten daher wiederum Reduktionsformeln, durch die die Grössen des Systems $P(1^k, 2^l, 3^m)$ mit z Elementen zurückgeführt werden auf die entsprechenden Grössen von

Systemen mit nur $z-1$ Elementen. Ebenso folgt aus dem oben Gesagten, dass wir vier Fälle unterscheiden müssen, je nachdem k und k+l gerade oder ungerade sind.

I. k und k + l gerade; also l auch gerade.

$$\begin{aligned} P_g(1^k, 2^l, 3^m) &= P_g(1^{k-1}, 2^l, 3^m) + P_g(1^k, 2^{l-1}, 3^m) + P_g(1^k, 2^l, 3^{m-1}), \\ I_g(1^k, 2^l, 3^m) &= I_g(1^{k-1}, 2^l, 3^m) + I_g(1^k, 2^{l-1}, 3^m) + I_g(1^k, 2^l, 3^{m-1}), \\ &\quad + k \cdot P_g(1^k, 2^{l-1}, 3^m) + (k + l) \cdot P_g(1^k, 2^l, 3^{m-1}). \end{aligned}$$

II. k gerade, k + l ungerade; folglich l ungerade.

$$\begin{aligned} P_g(1^k, 2^l, 3^m) &= P_g(1^{k-1}, 2^l, 3^m) + P_g(1^k, 2^{l-1}. 3^m) + P_u(1^k, 2^l, 3^{m-1}), \\ I_g(1^k, 2^l, 3^m) &= I_g(1^{k-1}, 2^l, 3^m) + I_g(1^k, 2^{l-1}, 3^m) + I_u(1^k, 2^l, 3^{m-1}) \\ &\quad + k \cdot P_g(1^k, 2^{l-1}, 3^m) + (k + l) \cdot P_u(1^k, 2^l, 3^{m-1}). \end{aligned}$$

III. k ungerade, k + l gerade; d. h. l auch ungerade.

$$\begin{aligned} P_g(1^k, 2^l, 3^m) &= P_g(1^{k-1}, 2^l, 3^m) + P_u(1^k, 2^{l-1}, 3^m) + P_g(1^k, 2^l, 3^{m-1}), \\ I_g(1^k, 2^l, 3^m) &= I_g(1^{k-1}, 2^l, 3^m) + I_u(1^k, 2^{l-1}, 3^m) + I_g(1^k, 2^l, 3^{m-1}) \\ &\quad + k \cdot P_u(1^k, 2^{l-1}, 3^m) + (k + l) P_g(1^k, 2^l, 3^{m-1}). \end{aligned}$$

IV. k und k + l ungerade; also l gerade.

$$\begin{aligned} P_g(1^k, 2^l, 3^m) &= P_g(1^{k-1}, 2^l, 3^m) + P_u(1^k, 2^{l-1}, 3^m) + P_u(1^k, 2^l, 3^{m-1}), \\ I_g(1^k, 2^l, 3^m) &= I_g(1^{k-1}, 2^l, 3^m) + I_u(1^k, 2^{l-1}, 3^m) + I_u(1^k, 2^l, 3^{m-1}) \\ &\quad + k \cdot P_u(1^k, 2^{l-1}, 3^m) + (k + l) \cdot P_u(1^k, 2^l, 3^{m-1}). \end{aligned}$$

Diese Reduktionsformeln ermöglichen es uns, die oben aufgestellten allgemeinen Formeln für $P_g(1^k, 2^l, 3^m)$ und $I_g(1^k, 2^l, 3^m)$ durch strenge Induktion zu beweisen. Wir nehmen sie für 1, 2, 3, ... m als richtig an und zeigen, dass für $m' = m + 1$ die aus den Rekursionsformeln folgenden Werte sich mit denen aus den allgemeinen Formeln decken. Dabei setzen wir $z = k + l + m$, $z' = k + l + m'$ und bezeichnen mit ζ bzw. ζ' die grössten Ganzen von $\frac{z}{2}$ bzw. $\frac{z'}{2}$.

I. k und k + l sind gerade, l also auch gerade.

Dann müssen die für m' aus den allgemeinen Formeln sich ergebenden Werte den entsprechenden aus den Reduktionsformeln identisch sein, d. h.

1. bei geradem m, sodass $\zeta = \zeta'$

$$\begin{aligned} P_g(1^k, 2^l, 3^{m'}) &= \frac{1}{2}\binom{z}{k-1}\binom{z+1-k}{l} + \frac{1}{2}\binom{z}{k}\binom{z-k}{l-1} + \frac{1}{2}\binom{z}{k}\binom{z-k}{l} + \frac{1}{2}\binom{\zeta}{k}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda} \\ &= \binom{z'}{k}\binom{z'-k}{l} + \frac{1}{2}\binom{\zeta'}{\varkappa}\binom{\zeta'-\varkappa}{\lambda}, \text{ da ja } \zeta = \zeta'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_g(1^k, 2^l, 3^{m'}) &= \frac{1}{2}\binom{k}{2}\binom{z}{k}\binom{z-k+1}{l} + \frac{1}{2}\binom{l+1}{2}\binom{z}{k-1}\binom{z-k+1}{l+1} \\ &\quad - \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa-1}\binom{\zeta-\varkappa+1}{\lambda}\binom{\zeta-\varkappa-\lambda+1}{\mu} \\ &\quad + \frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{z}{k+1}\binom{z-k}{l} + \frac{1}{2}\binom{l}{2}\binom{z}{k}\binom{z-k}{l} - \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda-1}\binom{\zeta-\varkappa-\lambda+1}{\mu} \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{z}{k+1}\binom{z-k}{l}+\frac{1}{2}\binom{l+1}{2}\binom{z}{k}\binom{z-k}{l+1}+\frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda}\frac{k\cdot l+(k+l)m}{2}$$

$$+\frac{k}{2}\binom{k}{z}\binom{z-k}{l-1}+\frac{k+l}{2}\binom{z}{k}\binom{z-k}{l}+\frac{k+l}{2}\cdot\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda}$$

$$=\frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{z+1}{k+1}\binom{z+1-k}{l}+\frac{1}{2}\binom{l+1}{2}\binom{z+1}{k}\binom{z+1-k}{l+1}$$

$$+\frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda}\frac{k\cdot l+(k+l)(m+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{z'}{k+1}\binom{z'-k}{l}+\frac{1}{2}\binom{l+1}{2}\binom{z'}{k}\binom{z'-k}{l+1}$$

$$+\frac{k\cdot l+(k+l)m'}{4}\binom{\zeta'}{\varkappa}\binom{\zeta'-\varkappa}{\lambda}.$$

Da auch in allen übrigen Fällen alle die z enthaltenden Glieder der Rekursionsformeln in derselben Weise wie oben auftreten, so führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$A=\frac{1}{2}\binom{z}{k-1}\binom{z-k+1}{l}+\frac{1}{2}\binom{z}{k}\binom{z-k}{l-1}+\frac{1}{2}\binom{z}{k}\binom{z-k}{l}=\frac{1}{2}\binom{z'}{k}\binom{z'-k}{l},$$

$$B=\frac{1}{2}\binom{k}{2}\binom{z}{k}\binom{z-k+1}{l}+\frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{z}{k+1}\binom{z-k}{l}+\frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{z}{k+1}\binom{z-k}{l}$$

$$+\frac{1}{2}\binom{l+1}{2}\binom{z}{k-1}\binom{z-k+1}{l+1}+\frac{1}{2}\binom{l}{2}\binom{z}{k}\binom{z-k}{l}+\frac{1}{2}\binom{l+1}{2}\binom{z}{k}\binom{z-k}{l+1}$$

$$+\frac{k}{2}\binom{z}{k}\binom{z-k}{l-1}+\frac{k+l}{2}\binom{z}{k}\binom{z-k}{l}=\frac{1}{2}\binom{k+1}{2}\binom{z'}{k+1}\binom{z'-k}{l}+\frac{1}{2}\binom{l+1}{2}\binom{z'}{k}\binom{z'-k}{l+1}.$$

Es ist also

$$A=\frac{1}{2}P(1^k,2^l,3^{m'})\text{ und }B=\frac{1}{2}I(1^k,2^l,3^{m'}).$$

2. m ist ungerade, also $\zeta'=\zeta+1$.

$$P_g(1^k,2^l,3^{m'})=A+\frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa-1}\binom{\zeta-\varkappa+1}{\lambda}+\frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda-1}+\frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda}$$

$$=A+\frac{1}{2}\binom{\zeta+1}{\varkappa}\binom{\zeta+1-\varkappa}{\lambda}=\frac{1}{2}\binom{z'}{k}\binom{z'-k}{l}+\frac{1}{2}\binom{\zeta'}{\varkappa}\binom{\zeta'-\varkappa}{\lambda}$$

$$I_g(1^k,2^l,3^{m'})=B+\frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa-1}\binom{\zeta-\varkappa+1}{\lambda}\frac{(k-1)l+(k+l-1(m+1)}{2}$$

$$+\frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda}\frac{k\cdot l+(k+l)m}{2}+\frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda-1}\frac{k\cdot(l-1)+(k+l-1)(m+1)}{2}$$

$$+\frac{k}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda-1}+\frac{k+l}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda}$$

$$=B+\frac{1}{2}\binom{\zeta+1}{\varkappa}\binom{\zeta+1-\varkappa}{\lambda}\frac{k\cdot l+(k+l)(m+1)}{2}$$

$$=B+\frac{k\cdot l+(k+l)m'}{4}\binom{\zeta'}{\varkappa}\binom{\zeta'-\varkappa}{\lambda}.$$

II. k gerade, k + l ungerade; also l ungerade.

1. m ist gerade, folglich $\zeta' = \zeta + 1$.

$$P_g(1^k, 2^l, 3^{m'}) \equiv A + \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda} - \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda} \equiv A,$$

$$\begin{aligned} I_g(1^k, 2^l, 3^{m'}) \equiv B &- \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa-1}\binom{\zeta-\varkappa+1}{\lambda}\binom{\zeta-\varkappa-\lambda+1}{\mu} \\ &+ \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda}\frac{k(l-1)+(k+l-1)(m+1)}{2} \\ &- \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\varkappa}\frac{k\cdot l+(k+l)m}{2} + \frac{k}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda} - \frac{k+l}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda} \\ \equiv B &- \frac{1}{2}\zeta'\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda} \equiv B - \frac{1}{2}\binom{\zeta'}{\varkappa}\binom{\zeta'-\varkappa}{\lambda}\binom{\zeta'-\varkappa-\lambda}{\mu}. \end{aligned}$$

2. m ist ungerade, daher $\zeta' = \zeta$.

$$P_g(1^k, 2^l, 3^{m'}) \equiv A + \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda} \equiv A + \frac{1}{2}\binom{\zeta'}{\varkappa}\binom{\zeta'-\varkappa}{\lambda},$$

$$\begin{aligned} I_g(1^k, 2^l, 3^{m'}) \equiv B &- \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa-1}\binom{\zeta-\varkappa+1}{\lambda}\binom{\zeta-\varkappa-\lambda+1}{\mu+1} + \frac{1}{4}\Big(k(l-1)+(k+l-1)(m+1)\Big)\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda} \\ &+ \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda}\binom{\zeta-\varkappa-\lambda}{\mu} + \frac{k}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda} \\ \equiv B &+ \frac{1}{4}\Big(kl+(k+l)m'\Big)\binom{\zeta'}{\varkappa}\binom{\zeta'-\varkappa}{\lambda}. \end{aligned}$$

III. k ungerade, k+l gerade, also l ungerade.

1. m ist gerade, sodass $\zeta'=\zeta$.

$$P_g(1^k, 2^l, 3^{m'}) \equiv \frac{1}{2}\binom{z'}{k}\binom{z'-k}{l} \equiv A,$$

$$\begin{aligned} I_g(1^k, 2^l, 3^{m'}) \equiv B &- \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda}\binom{\zeta-\varkappa-\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda}\binom{\zeta-\varkappa-\lambda}{\mu} - \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda}\binom{\zeta-\varkappa-\lambda}{\mu} \\ \equiv B &- \frac{1}{2}\binom{\zeta'}{\varkappa}\binom{\zeta'-\varkappa}{\lambda}\binom{\zeta'-\varkappa-\lambda}{\mu}. \end{aligned}$$

2. m ist ungerade, somit $\zeta'=\zeta+1$.

$$P_g(1^k, 2^l, 3^{m'}) \equiv A + \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda} - \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda} \equiv A,$$

$$\begin{aligned} I_g(1^k, 2^l, 3^{m'}) \equiv B &+ \frac{1}{4}\Big((k-1)l+(k+l-1)(m+1)\Big)\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda} - \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda}\binom{\zeta-\varkappa-\lambda}{\mu} \\ &- \frac{1}{4}\Big(k(l-1)+(k+l-1)(m+1)\Big)\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda} - \frac{k}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda} \\ \equiv B &- \frac{1}{2}\zeta'\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda} \equiv B - \frac{1}{2}\binom{\zeta'}{\varkappa}\binom{\zeta'-\varkappa}{\lambda}\binom{\zeta'-\varkappa-\lambda}{\mu+1}. \end{aligned}$$

IV. k ungerade, k+l auch ungerade, folglich l gerade.

1. m ist gerade, also $\zeta'=\zeta+1$.

$$P_g(1^k, 2^l, 3^{m'}) \equiv A + \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda} - \frac{1}{2}\binom{\zeta}{\varkappa}\binom{\zeta-\varkappa}{\lambda} \equiv A,$$

$$I_g(1^k,2^l,3^{m'}) \equiv B+\frac{1}{4}\Big((k-1)l+(k+l-1)(m+1)\Big)\binom{\zeta}{x}\binom{\zeta-x}{\lambda}+\frac{1}{2}\binom{\zeta}{x}\binom{\zeta-x}{\lambda-1}\binom{\zeta-x-\lambda+1}{\mu}$$
$$-\frac{1}{4}\Big(kl+(k+l)m\Big)\binom{\zeta}{x}\binom{\zeta-x}{\lambda}-\frac{k+l}{2}\binom{\zeta}{x}\binom{\zeta-x}{\lambda}$$
$$\equiv B-\frac{1}{2}\zeta'\binom{\zeta}{x}\binom{\zeta-x}{\lambda}\equiv B-\frac{1}{2}\binom{\zeta'}{x}\binom{\zeta'-x}{\lambda}\binom{\zeta'-x-\lambda}{\mu}.$$

2. m ist ungerade, daher $\zeta'=\zeta$.

$$P_g(1^k,2^l,3^{m'}) \equiv A+\frac{1}{2}\binom{\zeta}{x}\binom{\zeta-x}{\lambda}\equiv A+\frac{1}{2}\binom{\zeta'}{x}\binom{\zeta'-x}{\lambda},$$
$$I_g(1^k,2^l,3^{m'}) \equiv B+\frac{1}{4}\Big((k-1)l+(k+l+1)(m+1)\Big)\binom{\zeta}{x}\binom{\zeta-x}{\lambda}+\frac{1}{2}\binom{\zeta}{x}\binom{\zeta-x}{\lambda-1}\binom{\zeta-x-\lambda-1}{\mu+1}$$
$$+\frac{1}{2}\binom{\zeta}{x}\binom{\zeta-x}{\lambda}\binom{\zeta-x-\lambda}{\mu}$$
$$\equiv B+\frac{1}{4}\Big(kl+(k+l)m'\Big)\binom{\zeta'}{x}\binom{\zeta'-x}{\lambda}.$$

Wir ersehen hieraus, dass in allen Fällen die geforderten Identitäten bestehen. Wenn wir die allgemeinen Formeln $P_g(1^k,2^l,3^m)$, $I_g(1^k,2^l,3^m)$ als richtig voraussetzen für 1, 2, 3, ... m, so gelten sie auch für $m'=m+1$. Nun haben wir aber oben ihre Gültigkeit festgestellt für $m=1,2,3,4,5$, folglich sind sie auch ganz allgemein für beliebige m richtig.

Vertauscht man in dem System $P(1^k,2^l,3^m,\dots a^t,\dots)$ die Multiplizitäten zweier unmittelbar aufeinanderfolgenden Elementsorten $a-1$ und a miteinander, so ändert sich nichts an der Zahl der Inversionen, die diese beiden Elementsorten mit den vorhergehenden niedrigeren und den folgenden höheren Elementen bilden, weil die sämtlichen Elemente dieser beiden Sorten gegenüber allen früheren Elementsorten höhere, gegenüber allen nachfolgenden dagegen niedrigere Elemente sind. Eine Änderung hinsichtlich der Inversionen könnte nach Vertauschung der Exponenten der Elemente $a-1$ und a daher nur eintreten bei den Inversionen, die die beiden Sorten a und $a-1$ miteinander bilden. Nun haben wir aber beim System $P(1^k,2^l)$ gesehen, dass k und l vertauscht werden können, ohne dass dadurch die dort gefundenen Resultate geändert werden. Folglich wird durch die Vertauschung der Multiplizitäten zweier unmittelbar aufeinanderfolgenden Elementsorten keine Änderung hinsichtlich der Inversionen des Systems $P(1^k,2^l,\dots a^t,\dots)$ hervorgerufen.

Da sich ferner eine Vertauschung von zwei ganz beliebigen Elementsorten stets durch wiederholtes Vertauschen von zwei benachbarten Sorten erreichen lässt, so müssen auch nach Vertauschung der Multiplizitäten von zwei ganz beliebigen Elementen 1, 2, 3, ... a doch dieselben Resultate für die P_g und I_g auftreten wie vorher. Die früher gefundenen Formeln bleiben also auch nach der Vertauschung bestehen. So findet man z. B. leicht aus den Resultaten für das System $P(1^k,2^l,3^m)$, dass

$$P_g(1^k,2^l,3^m)=P_g(1^l,2^m,3^k)=P_g(1^m,2^k,3^l)=P_g(1^m,2^l,3^k)=P_g(1^l,2^k,3^m)=P_g(1^k,2^m,3^l),$$
$$I_g(1^k,2^l,3^m)=I_g(1^l,2^m,3^k)=I_g(1^m,2^k,3^l)=\dots$$

Abschnitt III.

Systeme $P(1, 2, 3, \ldots a-1, a^n)$.

Da unter den sämtlichen $n + a - 1$ Elementen n gleiche vorkommen, ist

$$P(1, 2, 3, \ldots a-1, a^n) = \frac{(n+a-1)!}{n!} = (n+a-1) \ldots (n+1).$$

Die n gleichen Elemente a können höchstens vor $a - 1$ niedrigere Elemente treten, das Element $a - 1$ vor $a - 2$ niedrigere, das Element $a - 2$ höchstens vor $a - 3$ niedrigere, usw. Für die grösstmögliche Anzahl von Inversionen in einer Permutation ergiebt sich daher

$$i_M(1, 2, 3, \ldots a-1, a^n) = n(a-1) + \binom{a-1}{2}.$$

Folglich ist auch

$$I(1, 2, 3, \ldots a-1, a^n) = \frac{i_M}{2} \cdot P(1, 2, 3, \ldots a-1, a^n)$$

$$= \frac{a-1}{2} \cdot (n+a-1) \ldots n + \frac{1}{2} \cdot (n+a-1) \ldots (n+1).$$

Rekursionsformeln für P_g und I_g.

Wir haben oben gefunden, dass wir die Multiplizitäten zweier Elemente vertauschen dürfen; es ist also

$$P(1, 2, 3, \ldots a-1, a^n) = P(1, 2, 3, \ldots (a-1),^n a).$$

Diese Beziehung benutzen wir, um die Permutationen des Systems $P(1, 2, 3, \ldots a^n)$ aus denjenigen des Systems $P(1, 2, 3, \ldots (a-1)^n)$ abzuleiten, indem wir das neue Element a auf alle möglichen Arten in die sämtlichen Permutationen dieses letzteren Systems einfügen.

Steht das Element a überall

1. am Ende der früheren Permutationen, so liefern die neuen Permutationen
   $I(1, 2, \ldots (a-1)^n)$ Inversionen.
2. vor dem letzten Element der früh. Permut., so lief. die neuen Permutationen
   $I(1, 2, \ldots (a-1)^n) + 1 \cdot P(1, 2, \ldots (a-1)^n)$ Inversionen,
3. vor den beiden letzten Elementen der früh. Permut., so lief. die neuen Permut.
   $I(1, 2, \ldots (a-1)^n) + 2 \cdot P(1, 2, \ldots (a-1)^n)$ Inversionen,
4. „ „ drei letzten Elementen der früh. Permut., so lief. die neuen Permut.
   $I(1, 2, \ldots (a-1)^n) + 3 \cdot P(1, 2, \ldots (a-1)^n)$ Inversionen,

. . . .

$(n + a - 2)$. „ „ $n + a - 3$ letzten Elementen der früh. Permut., so lief. die neuen Permut.
$I(1, 2, \ldots (a-1)^n) + (n + a - 3) \cdot P(1, 2, \ldots (a-1)^n)$ Inversionen,

$(n + a - 1)$. „ „ $n + a - 2$ letzten Elementen der früh. Permut., so lief. die neuen Permut.
$I(1, 2, \ldots (a-1)^n) + (n + a - 2) \cdot P(1, 2, \ldots (a-1)^n)$ Inversionen.

Demnach findet man zunächst

$$P(1, 2, 3, \ldots a-1, a^n) = (n+a-1) \cdot P(1, 2, 3, \ldots (a-2), (a-1)^n),$$

$$I(1, 2, 3, \ldots a^n) = (n+a-1) \cdot I(1, 2, 3, \ldots (a-1)^n) + \binom{n+a-1}{2} \cdot P(1, 2, 3, \ldots (a-1)^n),$$

durch deren wiederholte Anwendung man leicht die independenten Ausdrücke für P und I erhält, nämlich

$$P(1, 2, 3, \ldots a-1, a^n) = (n+a-1)(n+a-2)\ldots(n+1)\,P(1^n), \text{ und da } P(1^n) = 1,$$
$$= (n+a-1)(n+a-2)\ldots(n+1),$$
$$I(1, 2, 3, \ldots a-1, a^n) = (n+a-1)(n+a-2)\,I(1, 2, \ldots a-3, (a-2)^n)$$
$$+ (n+a-1)\binom{n+a-2}{2} P(1, 2, \ldots a-3, (a-2)^n)$$
$$+ \binom{n+a-1}{2} P(1, 2, \ldots a-2, (a-1)^n)$$
$$= (n+a-1)\ldots(n+a-3)\,I(1, 2, \ldots a-4, (a-3)^n)$$
$$+ (n+a-1)(n+a-2)\binom{n+a-3}{2} P(1, 2, \ldots a-4, (a-3)^n)$$
$$+ (n+a-1)\binom{n+a-2}{2} P(1, 2, \ldots a-3, (a-2)^n)$$
$$+ \binom{n+a-1}{2} P(1, 2, \ldots a-2, (a-1)^n)$$
$$= \ldots$$

und unter Berücksichtigung der oben gefundenen Werte P und des Wertes $I(1^n) = 0$ ergibt sich das Resultat

$$= (n+a-1)(n+a-2)\ldots(n+1)\cdot I(1^n)$$
$$+ \frac{1}{2}(n+a-1)\ldots(n+1)\big[(n+a-2) + (n+a-3) + \ldots + n\big]$$
$$= \frac{a-1}{2}(n+a-1)\ldots n + \frac{1}{2}\binom{a-1}{2}(n+a-1)\ldots(n+1).$$

Daraus folgt sofort

$$\frac{I(1, 2, \ldots a-1, a^n)}{P(1, 2, \ldots a-1, a^n)} = \frac{(a-1)n}{2} + \binom{a-1}{2} = \frac{1}{2}\, i_M(1, 2, \ldots a-1, a^n),$$

sodass sich auch hier wiederum als mittlere Anzahl der in einer der $P(1, 2, \ldots a-1, a^n)$ vorkommenden Inversionen ergibt

$$i_m(1, 2, \ldots a-1, a^n) = \frac{1}{2}\cdot i_M(1, 2, \ldots a-1, a^n),$$

was wir ja schon am Anfang dieses Abschnitts gefunden hatten.

Zur Bestimmung der P_g und I_g müssen wir die folgenden beiden Fälle unterscheiden, je nachdem $n+a$ eine gerade oder ungerade Zahl ist. Beachtet man ferner, dass sich die Klasse der Permutationen nicht ändert, wenn die Inversionszahl sich um eine gerade Anzahl vermehrt, dass dagegen bei einer Vermehrung um eine ungerade Anzahl von Inversionen die geraden Permutationen des früheren Systems in ungerade des neuen verwandelt werden und die ungeraden in gerade, so findet man folgende Rekursionsformeln:

I. a und n sind beide gerade oder beide ungerade.

$$P_g(1, 2, 3, \ldots a^n) = \frac{n+a}{2} P_g(1,2,3,\ldots(a-1)^n) + \frac{n+a-2}{2}\cdot P_u(1, 2, 3, \ldots (a-1)^n)$$
$$= \frac{n+a-2}{2} P(1,2,3,\ldots(a-1)^n) + P_g(1, 2, 3, \ldots (a-1)^n).$$

$$I_g(1, 2, 3, \dots a^n) = \frac{n+a}{2} I_g(1,2,3,\dots(a-1)^n) + \frac{n+a-2}{2} I_u(1,2,3,\dots(a-a)^n)$$
$$+ \frac{(n+a)(n+a-2)}{4} P_g(1,2,3,\dots(a-1)^n) + \frac{(n+a-2)^2}{4} P_u(1,2,3,\dots(a-1)^n)$$
$$= \frac{n+a-2}{2} I(1,2,3\dots(a-1)^n) + I_g(1,2,3,\dots(a-1)^n)$$
$$+ \frac{(n+a-2)^2}{4} P(1,2,3,\dots(a-1)^n) + \frac{n+a-2}{2} P_g(1,2,3,\dots(a-1)^n).$$

II. a und n sind **nicht** gleichzeitig gerade oder ungerade.

$$P_g(1, 2, 3, \dots a^n) = \frac{n+a-1}{2} P_g(1,2,\dots(a-1)^n) + \frac{n+a-1}{2} P_u(1,2,\dots(a-1)^n)$$
$$= \frac{n+a-1}{2} P(1, 2, \dots (a-1)_n).$$
$$I_g(1,2,3,\dots a^n) = \frac{n+a-1}{2} I_g(1,2,\dots(a-1)^n) + \frac{n+a-1}{2} I_u(1,2,\dots(a-1)^n)$$
$$+ \frac{(n+a-1)(n+a-3)}{4} P_g(1,2,\dots(a-1)^n) + \frac{(n+a-1)^2}{4} P_u(1,2,\dots(a-1)^n)$$
$$= \frac{n+a-1}{2} I(1,2,\dots(a-1)^n) + \frac{(n+a-1)^2}{4} P(1,2,\dots(a-1)^n) - \frac{n+a-1}{2} P_g(1,2,\dots(a-1)^n).$$

Aus den früher gefundenen Formeln ergeben sich für a=1, 2, 3 folgende Werte:

1. a=1:

$P_g(1^n) = 1$, $I_g(1^n) = 0$.

2. a=2:

für ungerade n ist

$P_g(1, 2^n) = \frac{1}{2}(n+1)$, $I_g(1, 2^n) = \frac{1}{2}\binom{n+1}{2} - \frac{1}{2}(\nu+1)$.

für gerade n wird

$P_g(1, 2^n) = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2}$, $I_g(1, 2^n) = \frac{1}{2}\binom{n+1}{2} + \frac{1}{2}\nu$.

3. a=3; n beliebig:

$P_g(1, 2, 3^n) = \binom{n+2}{2} = \frac{1}{2}P$, $I_g(1, 2, 3^n) = 3\binom{n+2}{3} + \frac{1}{2}\binom{n+2}{2} - \frac{1}{2}(\nu+1) = \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}(\nu+1)$.

Mit Hilfe der obigen Rekursionsformeln lassen sich aus diesen Werten noch folgende Resultate herleiten:

4. a=4:

n ist ungerade.

$P_g(1, 2, 3, 4^n) = 3\binom{n+3}{3} = \frac{1}{2}P$, $I_g(1, 2, 3, 4^n) = 18\binom{n+3}{4} + \frac{9}{2}\binom{n+3}{3} = \frac{1}{2}I$,

n ist gerade.

$P_g(1, 2, 3, 4^n) = 3\binom{n+3}{3} = \frac{1}{2}P$, $I_g(1, 2, 3, 4^n) = 18\binom{n+3}{4} + \frac{9}{2}\binom{n+3}{3} - \frac{1}{2}(\nu+1)$.

Wir wollen nun beweisen, dass allgemein für a>4 die Beziehungen gelten

$$P_g(1,2,3,\dots a^n) = \frac{1}{2} P(1,2,3,\dots a^n) = \frac{1}{2}(n+a-1)\dots(n+1),$$

$$I_g(1,2,3,\dots a^n) = \frac{1}{2} I(1,2,3,\dots a^n) = \frac{a-1}{4}(n+a-1)\dots n + \frac{1}{4}\binom{a-1}{2}(n+a-1)\dots(n+1)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot i_M(1,2,\dots a^n)\cdot P_g(1,2,3,\dots a^n).$$

Wir nehmen die obigen Formeln als richtig an für die Werte 5, 6, ... a und zeigen, dass sie dann auch für a+1 gelten müssen. Das ist der Fall, wenn die aus unseren Formeln gefundenen Werte mit den aus den obigen Rekursionsformeln sich für a+1 ergebenden identisch sind.

I. n und a sind gleichzeitig gerade oder zugleich ungerade, also n und a+1 nicht beide gerade oder beide ungerade.

$$P_g(1,2,3,\dots(a+1)^n) = \frac{n+a}{2}\cdot P(1,2,3,\dots a^n)$$

$$= \frac{1}{2}(n+a)(n+a-1)\dots(n+1)$$

$$= \frac{1}{2} P(1,2,3,\dots(a+1)^n).$$

$$I_g(1,2,3,\dots(a+1)^n) = \frac{n+a}{2} I(1,2,3,\dots a^n) + \frac{(n+a^2)}{4} P(1,2,3,\dots a^n) - \frac{n+a}{2} P_g(1,2,3,\dots a^n)$$

$$= \frac{n+a}{2} I(1,2,3,\dots a^n) + \frac{1}{2}\binom{n+a}{2} P(1,2,3,\dots a^n)$$

$$= \frac{a}{4}\cdot(n+a)(n+a-1)\dots n + \frac{1}{4}\binom{a}{2}\cdot(n+a)(n+a-1)\dots(n+1)$$

$$= \frac{1}{2} I(1,2,3,\dots(a+1)^n).$$

II. n und a sind nicht gleichzeitig gerade oder ungerade, folglich n und a+1 beide gerade oder beide ungerade.

$$P_g(1,2,3,\dots(a+1)^n) = \frac{n+a-1}{2} P(1,2,3,\dots a^n) + P_g(1,2,3,\dots a^n)$$

$$= \frac{n+a}{2} P(1,2,3,\dots a^n) = \frac{1}{2} P(1,2,3,\dots(a+1)^n).$$

$$I_g(1,2,3,\dots(a+1)^n) = \frac{n+a-1}{2} I(1,2,3,\dots a^n) + I_g(1,2,3,\dots a^n)$$

$$+ \frac{(n+a-1)^2}{4} P(1,2,3,\dots a^n) + \frac{n+a-1}{2} P_g(1,2,3,\dots a^n)$$

$$= \frac{n+a}{2} I(1,2,3,\dots a^n) + \frac{1}{2}\binom{n+a}{2} P(1,2,3,\dots a^n)$$

$$= \frac{1}{2} I(1,2,3,\dots(a+1)^n).$$

Die geforderten Identitäten bestehen also für den Wert $a+1$ in der Tat, wenn wir voraussetzen, dass die gefundenen allgemeinen Formeln richtig sind für die Werte $5, 6, \dots a$. Da sich nun die Richtigkeit der obigen Formeln für $a=5$ induktiv leicht nachprüfen lässt, so gelten sie auch allgemein für alle Werte $a>4$.

Für alle Werte $a>4$ ist daher im System $P(1,2,3\dots a^n)$ stets

$$P_g = \frac{1}{2} P, \quad I_g = \frac{1}{2} I,$$

folglich auch

$$P_g = P_u, \quad I_g = I_u.$$

Es besteht also dann kein Unterschied mehr zwischen den Permutationen mit und ohne Wiederholung, da ja bei lauter voneinander verschiedenen Elementen genau dieselben Beziehungen gelten, wie wir in der Einleitung gesehen haben.

Das eben behandelte System $P(1,2,3,\dots a^n)$ ist nur ein spezieller Fall des ganz allgemeinen Systems $P(1^k, 2^l, 3^m, \dots a^t)$; wir können also vermuten, dass sich auch bei diesem allgemeinen System die Verhältnisse denen bei lauter verschiedenen Elementen umso mehr nähern, je grösser die Anzahl a der im System vorhandenen Elementsorten ist. In dieser Vermutung wird man noch bestärkt durch die Resultate der folgenden Beispiele, zu denen man auf induktivem Wege unschwer gelangt:

1. $P_g(1, 2, 3, 4^2, 5^3) = P_u = 1\,680, \quad I_g(1, 2, 3, 4^2, 5^3) = I_u = 20\,160$
2. $P_g(1, 2, 3, 4, 5^2, 6^3) = P_u = 15\,120, \quad I_g(1, 2, 3, 4, 5^2, 6^3) = I_u = 241\,920$
3. $P_g(1, 2, 3, 4^2, 5^2, 6^3) = P_u = 75\,600, \quad I_g(1, 2, 3, 4^2, 5^2, 6^3) = I_u = 1\,512\,000.$

Für den Fall, dass $P_g = \frac{1}{2} P$, $I_g = \frac{1}{2} I$, muss, wie wir oben gesehen haben, zwischen den I_g und P_g stets die Beziehung bestehen

$$I_g = \frac{1}{2} \cdot i_M \cdot P_g.$$

Wir haben aber früher schon gefunden (vgl. S. 12), dass diese einfache Beziehung der I_g und P_g auch existieren kann, wenn

$$P_g \neq P_u \text{ und } I_g \neq I_u \text{ ist.}$$

Für diesen Fall will ich noch zwei Beispiele anführen, bei denen vier verschiedene Elementsorten vorkommen, und für die ich die angegebenen Werte ebenfalls durch Induktion bestimmt habe:

1. $P(1, 2^2, 3^2, 4^2)$, wobei $i_M = 18$.
   $P_g = 318 \quad I_g = 2862$
   $P_u = 312 \quad I_u = 2808.$
2. $P(1^2, 2^2, 3^2, 4^2)$, wofür $i_M = 24$.
   $P_g = 1\,284 \quad I_g = 15\,408$
   $P_u = 1\,236 \quad I_u = 14\,832.$

Zum Schlusse bleibt mir noch die angenehme Pflicht, Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. Netto meinen herzlichsten Dank auszusprechen für die Anregung zu dieser Arbeit und für das Interesse, mit dem er meine Untersuchungen verfolgt hat.

Lebenslauf.

Ich, Otto Kammer, wurde am 22. Oktober 1879 als Sohn des Gastwirts und Metzgermeisters Heinrich Kammer in Nidda geboren. Ich besuchte zunächst 3 Jahre lang die Volksschule, von Ostern 1889 bis Ostern 1894 die höhere Bürgerschule meines Vaterstädtchens und trat dann in die Untersekunda des Realgymnasiums zu Giessen ein. Hier erhielt ich Ostern 1895 die Berechtigung zum einjährig-freiwilligen Militärdienst und im März 1898 das Reifezeugnis. Darauf studierte ich an der Universität in Giessen Mathematik und Naturwissenschaft. Während meiner Studienzeit nahm ich an zwei grösseren wissenschaftlichen Exkursionen nach der Nord- und Ostsee und nach Tirol und Oberitalien teil. Im März 1902 bestand ich die Prüfung für das höhere Lehramt und zwar in Reiner Mathematik I, Physik I, Geographie I. Während meines Akzessjahres am pädagogischen Seminar des Gymnasiums zu Giessen war ich für einige Zeit beurlaubt als Reisebegleiter eines Sohnes des Freiherrn von Heyl zu Herrnsheim. Seit Ostern 1903 bin ich mit der provisorischen Verwaltung einer Lehrerstelle an der Realschule zu Alsfeld beauftragt. Am 1. April 1904 wurde ich zum Lehramtsassessor ernannt.

Druckfehler-Berichtigung.

Seite 14, Zeile 2 von oben: $+\frac{k}{2}\binom{z}{k}\binom{z-k}{l-1}+\ldots$

„ 14, „ 5 „ unten: $\ldots\frac{(k-1)l+(k+l-1)(m+1)}{2}$

„ 17, „ 16 „ oben: $P(1, 2, 3, \ldots a-1, a^n) = P(1, 2, 3, \ldots (a-1)^n, a)$.

„ 17, letzte Zeile: $\ldots+\binom{n+a-1}{2}\cdot P(1, 2, 3, \ldots (a-1)^n)$

„ 19, Zeile 1 von oben: $\ldots I_u(1, 2, 3, \ldots (a-1)^n)$

„ 20, „ 14 „ „ $\ldots+\frac{(n+a)^2}{4}P(1, 2, 3, \ldots a^n)-\frac{n+a}{2}P_g(1, 2, 3, \ldots a^n)$

